Mathematik 1: Prüfungsvorbereitendes Repetitorium

René C. Kiesler

23. Januar 2004

Zusammenfassung

Das prüfungsvorbereitende Repetitorium vom 14. Jänner 2004 war ganz im Zeichen der Mathematik 1 Prüfung am 23. Jänner 2004. Ich habe die schnellen Worte Professor Kaisers, so gut es eben ging, im Rahmen dieses Dokuments zusammengestellt.

Sollte hier etwas unrund oder unklar erscheinen, oder wenn irgendwer zu Punkten mehr dazugeschrieben hat, ersuche ich um Diskussion im Mathematik 1 Subforum des Informatikforums[1]

[1] http://hades.gothic.at/iforum/forumdisplay.php?f=16

Inhaltsverzeichnis

[2] [Kaiser], II(58), Faktoralgebra II(56)

1 Analysis

1.1 Kongruenzrelation

Wie ist eine Kongruenzrelation auf einen Vektorraum definiert?

(Siehe Skript, Seite 82. Danke, reddi / Informatikforum!)

Satz 1 *Alle Unterräume U von $< H, +, K >$ und die Kongruenzen des Vektorraumes entsprechen einander in bijektiver Weise:*

$$\Theta \rightarrow U = [0]_\Theta \quad bzw. \quad U \rightarrow \Theta_U \tag{1}$$

definiert durch

$$v\Theta_U w \Leftrightarrow v + U = w + U \tag{2}$$

1.2 Homomorphiesatz[3]

Wie lautet der Homomorphiesatz für Halbgruppen, Definieren Sie die Begriffe Halbgruppen und erklären Sie die dabei verwendeten Begriffe: Homomorphismus, Isomorphismus, homomorphes Bild, Faktorhalbgruppe, Halbgruppe und Kongruenzrelation.

1.2.1 Definition Halbgrupe

Definition 1 (Binäre Operation) *Sei $M \neq \emptyset$. Unter einer binären Operation $\circ$ auf M (auch „zweistellige Verknüpfung in M" genannt) versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Paar von Elementen aus M ein eindeutig bestimmtes Element von M zuordnet.*

Eine binäre Operation $\circ$ auf eine nichtleere Menge M ist also durch drei Eigenschaften gekennzeichnet:

1. *überall definiert*
2. *wohldefiniert*

[3][Kaiser], II(58), Faktoralgebra II(56)

3. *abgeschlossen*

Definition 2 (Gruppoid und Halbgruppe) *Eine Algebra* $< A, \circ >$ *mit genau einer binären Operation* $\circ$ *nennt man auch Gruppoid. Ist* $\circ$ *in* $< A, \circ >$ *assoziativ, so heißt* $< A, \circ >$ *Halbgruppe.*

Definition 3 (Homomorphismus) *Seien* $< H, \circ >$ *und* $< F, \star >$ *Halbgruppen. Eine Abbildung* $f : H \to F$ *heißt Homomorphismus, wenn gilt:*

$$f(a \circ b) = f(a) \star f(b) \qquad \forall a, b \in H \tag{3}$$

Definition 4 (homomorphes Bild) $< H, \star >$ *heißt homomorphes Bild von* $< H, \circ >$*, wenn es einen surjektiven Homomorphismus* $f : H \to F$ *gibt.*

Die Kongruenzrelation wurde bereits in Definition **??** definiert.

Definition 5 (Faktoralgebra) *Sei* $< S, \circ_1, \ldots, \circ_k >$ *eine Algebra und* $\sim$ *eine Kongruenzrelation auf diese Algebra. Da* $\sim$ *eine spezielle Äquivalenzrelation auf* S *ist, liegt eine Klasseneinteilung von* S *vor; wir bezeichnen die Klassen bezüglich* $\sim$ *mit* C_i*:*

$$\overline{S} := (C_1, C_2, \ldots)$$

Ist die Verknüpfung $\circ_i$ *der Klassen wohlbestimmt, erhält man eine Faktoralgebra* $\overline{S}$ *nach der Kongruenzrelation* $\sim$*. Man bezeichnet diese üblicherweise mit* $< S/_{\sim}, \circ_1, \ldots, \circ_k >$*.*

Vermutung 1 (Faktorhalbgruppe) *Eine Faktorhalbgruppe ist eine Faktoralgebra mit einer assoziativen Operation.*

1.3 Untergruppen S_3

Man bestimme alle Untergruppen von S_3 *. Permutation mit Hintereinanderausführung. Wie sieht das HASSE-Diagramm aus?*

1.3.1 Die S_3

$|S_3| = 3!$, S_3 hat somit 6 Kombinationsmöglichkeiten. 3 Transpositionen + Neutrales Element = 3 Untergruppen. (Aus [RG])

1.3.2 Alle Permutationen von S_3

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1.3.3 Untergruppen von S_3

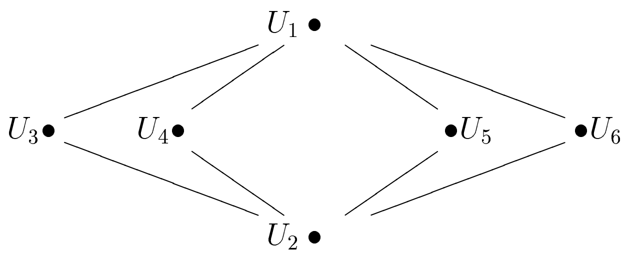
$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \langle S_3, \circ \rangle \\ U_2 &= \langle \epsilon, \circ \rangle \end{aligned} \right\} \qquad \text{triviale}$$

$$\left. \begin{aligned} U_3 &= \left\langle \left\{ \epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \circ \right\rangle \\ U_4 &= \left\langle \left\{ \epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \circ \right\rangle \\ U_5 &= \left\langle \left\{ \epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \circ \right\rangle \\ U_6 &= \left\langle \left\{ \epsilon, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \circ \right\rangle \end{aligned} \right\} \qquad \text{nicht triviale}$$

1.3.4 weitere Untergruppen

...gibt es nicht (wichtiger Hinweis bei der Prüfung). Siehe Satz von La GRANGE (nur 2- oder 3 elementige Untergruppen).

1.3.5 Hasse-Diagramm S_3



1.4 Untergruppen von $< \mathbb{Z}_8, + >$

Man bestimme sämtliche Untergruppen der $< \mathbb{Z}_8, + >$ Man zeige, daß die Menge aller Untergruppen bezüglich der mengentheoretischen Inklusion eine Halbordnung bildet. Man konstruiere das dazugehörige Hassediagramm. Man gebe die von $\overline{2}$ erzeugte Untergruppe in Permutationsdarstellung an.

1.4.1 Die $< \mathbb{Z}_8, + >$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$

1.4.2 Untergruppen der $< \mathbb{Z}_8, + >$

$U_0 = \{\overline{0}\}$

$U_1 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{0}\}$

$U_2 = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{0}\}$

$U_3 = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{0}\}$

$U_4 = \{\overline{4}, \overline{0}\}$

$U_5 = \{\overline{5}, \overline{2}, \overline{7}, \overline{4}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{3}, \overline{0}\}$

$U_6 = \{\overline{6}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{0}\}$

$U_7 = \{\overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}\}$

1.4.3 Halbordnung

Die $< \mathbb{Z}_8, + >$ ist eine Halbordnung. Begründung:

Reflexiv:	$U_1 \subseteq U_1$
Antisymmetrisch:	$U_2 \subseteq U_3 \wedge U_3 \nsubseteq U_2 \Rightarrow U_3 \neq U_2$
Transitiv:	$U_4 \subseteq U_3 \wedge U_3 \subseteq U_1 \Rightarrow U_4 \subseteq U_1$

1.4.4 Hassediagramm $< \mathbb{Z}_8, + >$

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[d, dash] \\ U_2 \arrow[d, dash] \\ U_4 \arrow[d, dash] \\ U_0 \end{tikzcd}$$

1.4.5 Von $\overline{2}$ erzeugte Untergruppe

$+$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \end{pmatrix} = (\epsilon)$$

$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = (0246)$

$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \\ 4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (04)(26)$

$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \\ 6 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (0642)$

$U_x = \{(\epsilon), (04)(26), (0246), (0642)\}$

1.5 Vollständige Induktion

(unvollständig:)

$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \dots$

1.6 Bernoulische Ungleichung

Folgern Sie die Bernoulische Ungleichung aus dem Binomischen Lehrsatz

Definition 6 (Bernoulische Ungleichung) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und festes* $h \geq 0$ *gilt:*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \tag{4}$$

Definition 7 (Binomischer Lehrsatz)

$$(1+h)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h^i = 1 + nh + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} h^i \tag{5}$$

1.6.1 Folgerung der Bernoulischen Ungleichung

(Dank an Templar / Informatikforum!)

Zuerst mal stellen wir fest, dass der linke Teil der Bernoulischen Ungleichung durch den Binomischen Lehrsatz dargestellt werden kann.

$$(1+n)^h = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h^i = 1 + n * h + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} h^i \tag{6}$$

Hierzu heben wir die beiden Elemente heraus (siehe $i = 2$):

$$\binom{n}{0} h^0 = 1, \binom{n}{1} h^1 = nh \tag{7}$$

Diese Summe kann nicht negativ sein, somit gilt die Bernoullische Ungleichung

$$(1+n)^h \geq 1 + nh \tag{8}$$

1.7 Begriff Differentialquotient

Aus [Duden], Seite 101

Ist $f'(x)$ die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0, so nennt man die lineare Funktion

$$d \quad f(x) : h \mapsto f'(x)h \tag{9}$$

das Differential von f an der Stelle x. Für die identische Funktion $f : x \mapsto x$ ist insbesondere

$$df(x(h)) = dx(h) = h \tag{10}$$

weshalb die Schreibweise $df(x) = f'(x) \quad dx$ bzw. $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ sowie die Bezeichnung Differentialquotient für die Ableitung naheliegend sind. Der Differentialquotient lässt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ für $\Delta x \to 0$ auffassen.

1.8 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

1.9 Leibnitz

Wie lautet die Leibnitzsche Produktregel?

1.10 Unendlich oft differenzierbar, wann?

Laut [Analysis 1]:

Satz 2 *Folgende Funktionen sind beliebig (=unendlich) oft differenzierbar:*

1. *Polynome*
2. *rationale Funktionen*
3. *durch Potenzreihen darstellbare Funktionen (im Konvergenzintervall)*

1.11 Potenzreihe

Wie ist eine Potenzreihe mit Anschlussstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert?

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{11}$$

1.12 Konvergenzradius

Wie ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe definiert?

Hinweis: nur „r" hinschreiben ist zu wenig...

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{12}$$

Im Prüfungsordner findet sich ein anderes Beispiel:

Konvergenzradius und -bereich von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$.

Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{x^{n^2}}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n! x^{n^2+2n+1}}{(n+1)! x^{n^2}} \right| \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{n+1}\right| \begin{cases} |x| \leq 1 & \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Radius} = 1[1,-1] \\ |x| > 1 & \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \end{cases} \tag{14}$$

Uns interessiert natürlich zuerst der Fall 2: $\frac{\infty}{\infty}$. Eine klassische unbestimmte Form, wir verwenden somit den Satz von l'hospital.

$$\begin{aligned} |x| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{(2n+1)\ln|x|}}{n+1} = \\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^{(2n+1)\ln|x|}2\ln|x|}{1} = +\infty \end{aligned} \tag{15}$$

Was ist genau mit dem Fall $x = 1$ los? Auch hier hilft uns l'hospital weiter.

$$\begin{aligned} |x| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}}{n+1} = \frac{1^{\infty}}{\infty} = \\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^{(2n+1)\ln x}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

1.12.1 In welchen Punkten ist f stetig?

1.13 Identitätssatz

Wie ist der Identitätssatz für Potenzreihen definiert?

Satz 3 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Sind die beiden Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ in einem gemeinsamen Intervall um x_0 konvergent und dort gleich, so gilt:*

$$a_k = b_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0 \tag{17}$$

1.14 Ableiten

Gegeben ist eine Funktionsreihe $F_k(x)$.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$$

Wann ist die Summe der Ableitung gleich der Summe der Ableitung der Glieder? $\Rightarrow$ bei gleichmäßiger Konvergenz!

1.15 Potenzreihenentwicklung für elementare Funktionen

Potenzreihenentwicklung für e^x*,* $\sin$*?*

Die Potenzreihe der Exponentialfunktion e^x ([Kaiser], II(66)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{18}$$

Die Potenzreihe des Sinus ([Kaiser], II(70)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{19}$$

1.16 Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$< x_1, x_2, x_3 > \to \frac{\cos x_1 x_3 + \sin x_3}{1 + x_2^3 + x_3^2}$$

In welchen Punkten ist f *stetig?*

sin, cos: stetig

Polynom stetig (Nullstellen)?

1.17 Satz von ROLLE

Wie ist der Satz von ROLLE definiert[4]?

Satz 4 (Satz von ROLLE) *Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, im offenen Intervall (a, b) differenzierbar und $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

1.18 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

1.19 Satz von Taylor

Nicht auf das Restglied vergessen!

Aus [Kaiser], II(94):

Satz 5 (Satz von TAYLOR) *Sei f eine Funktion, für die im abgeschlossenen Intervall $[x_0, x_0 + h]$ die n-te Ableitung $(n \in \mathbb{N})$ existiert und stetig ist, und für die in $(x_0, x_0 + h)$ die $n + 1$. Ableitung $\left(f^{(n+1)}(x)\right)$ existiert. Dann gilt*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n \tag{20}$$

und es ist

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \Theta h) \tag{21}$$

für ein $0 < \Theta < 1$.

Was ist eine hinreichende Bedingung für lokale Extremwerte?

Richtigkeit folgender Reihenentwicklung:

$$\ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ldots \qquad |x| < 1$$

[4] siehe [Kaiser], II(90)

1.20 Binominalreihe

Wie ist die Binominalreihe definiert?

1.21 Stetigkeit

Wie lautet die genaue Definition des Begriffes „stetig" ([Kaiser], II(45))?

Definition 8 (Stetige Funktion) *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. f heißt an der Stelle $a \in D$ stetig, wenn $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert und gleich $f(a)$ ist. Ist f stetig für jedes $a \in D$, so heißt f stetig auf D.*

1.22 Differenzierbarkeit

Wie lautet die genaue Definition des Begriffes „differenzierbar" ([Kaiser], II(76))?

Definition 9 (Differenzierbar) *Existiert in x_0 die Ableitung von f, so heißt f in x_0 differenzierbar. f heißt auf I differenzierbar, wenn f in jedem Punkt von I differenzierbar ist. Die Bildung von f' nennt man auch Differentation von f.*

1.23 Unstetigkeit

Was ist eine Unstetigkeit?

Anschaulich gesprochen ist eine Unstetigkeit eine Stelle, an der man keine Tangente legen kann. Beispielsweise die Spitze eines Dreieckes vs. das maximum einer Parabel.

Ist $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-6x+2}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ differenzierbar?

Nachdem die Division durch Null nicht definiert ist, ist dieser Ausdruck nicht an den Stellen differenzierbar, an denen $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$ gilt. Das ist laut Mathematica an den Stellen $x \to 1$ und $x \to 2$ der Fall.

Wenn man sich den Graph dazu genauer ansieht, stellt man fest, dass zwischen 1 und 2 „nichts zu sehen ist”. Das Stetigkeitsintervall ist somit $(-\infty, 1)$ und $(2, +\infty)$.

Wie man auf sowas bei der Prüfung ohne Hilfsmittel kommt, ist mir allerdings ein Rätsel!

$f'(x)$[5]

1.23.1 hebbare Unstetigkeitsstelle

(siehe [Kaiser], II(47), danke an Dexter und logonoff / Informatikforum!)

Definition 10 (hebbare Unstetigkeitsstellen) *Stellen $a \in D$, in denen f nicht stetig ist, heißen Unstetigkeitsstellen von f.*

Wenn $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ existiert, jedoch $A \neq f(a)$, spricht man von einer hebbaren Unstetigkeitsstelle. Definiert man also f im Punkt a um $f(a) = A$, so erhält man eine in a stetige Funktion.

1.24 unbestimmte Form

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x^{\frac{1}{x}}\right) = 1^{\frac{1}{0}} \tag{22}$$

Wir verwenden die allgemeine Potenz:

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln|a|} \tag{23}$$

Unsere Formel eingesetzt:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln|\cos x|} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln|\cos x|} \tag{24}$$

Nebenrechnung, wir Rechnen uns den Grenzwert des Exponenten aus:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln|\cos x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|\cos x|}{x} = \frac{0}{0} \tag{25}$$

[5] keine Ahnung, wie so ich dass da so unmotiviert aufgeschrieben habe...

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{1} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0 \tag{26}$$

Somit erhalten wir das Ergebnis:

$\Rightarrow e^0 = 1$

1.25 allgemeine Potenz

Wie ist die allgemeine Potenz a^b definiert?

Definition 11 (Allgemeine Potenz)

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{27}$$

1.26 l'hospital

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \tag{28}$$

L'hospital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{29}$$

Wir setzen für unseren Term ein:

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 2x \Rightarrow f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \tag{30}$$

$$g(x) = x - \sin x \Rightarrow g'(x) = 1 - \cos x \tag{31}$$

Wie Kollege Razmik auf die folgenden Zeilen kommt, weis ich nicht. Hat scheinbar was mit dem Satz von L'Hospital zu tun.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \tag{32}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \tag{33}$$

Wie kommt er da drauf? Wieso setzt er im Folgenden ausgerechnet $e^x + e^{-x}$ ein, wo ist das $-2x$ geblieben? Und warum $\cos x$?

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2 \tag{34}$$

Wir haben ein Ergebnis.

Wie werden die unbestimmten Formen 0∞ *und* 0^0 *behandelt?* $\Rightarrow$ l'hospital!

1.27 Stammfunktion suchen

Beim Integrieren wird vor allem nach Stammfunktionen gesucht. zB:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} \tag{35}$$

steht so im Analysis-Prüfungsordner, 9. März 2003, 7./14. Juli (Jahr unbekannt), 7. März 1996, 1. März 1996, 18. Dezember 1994 und 18. November 1994. Ist also eine sehr beliebte Prüfungsfrage![6]

[6](danke EnriqueS / Informatik Forum!)

1.27.1 Integral 35 ausgerechnet

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sin(x)\cos^3(x)\sin(x)\cos(x)} \quad \text{zusammenfassen} \tag{36}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sin^2(x)\cos^4(x)} \quad \text{auf cos bringen} \tag{37}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-\cos^2(x))\cos^4(x)} \quad \text{partielle integration} \tag{38}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-u} \quad du + \int \frac{1}{u} \quad du + \int \frac{1}{u^2} \quad du\right) \quad \text{aufteilen} \tag{39}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\ln|1-u| + \ln|u| - \frac{1}{u}\right) + C \quad \text{ausrechnen} \tag{40}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\ln|1-\cos^2 x| + \ln|\cos^2 x| - \frac{1}{\cos^2 x}\right) + C \quad \text{rücksubstitution} \tag{41}$$

$C \in \mathbb{R}$

Wir substitutieren dabei $u = \cos^2 x$, erhalten somit $-2\sin x \cos x \quad dx = du$ $\Rightarrow dx = \frac{du}{-2\sin x \cos x}$

Zur Partiellen Integration. Wir erhalten aus $u^2(1-u)$ den Term $\frac{A}{(1-u)} + \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2}$. Nach bringen auf einen gemeinsamen Nenner: $A = B = C = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u} + \int \frac{1}{u} + \int \frac{1}{u^2} \quad du$

(Aus [RG])

Stammfunktion suchen

steht so im Analysis-Prüfungsordner, 6. Oktober 2000[7]

[7] nochmals danke EnriqueS!

$$\int x^2 \sin x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \quad dx \tag{42}$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \right] \quad dx \tag{43}$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R} \tag{44}$$

Substitutionsregel: $vu' = uv - \int v'u$

Substitution 1: $\int x^2 \sin x \quad dx : v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$, $u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x$.

Substitution 2: $2 \int x \cos x \quad dx : v = x \Rightarrow v' = 1$, $u' = \sin x \Rightarrow u = \sin x$.

Zusammenfassen, partiell Integrieren, nochmal Zusammenfassen, wieder partiell Integrieren.

(Aus [RG])

nochmal Stammfunktion suchen

(Danke Dexter / Informatikforum!)

Lösung aus [RG]:

$$\int xe^x \sin x \quad dx = -\frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)x + \frac{1}{2}\int e^x(\cos x - \sin x) \quad dx \tag{45}$$
$$= -\frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)x + \frac{1}{2}\left[\int e^x \cos x \quad dx - \int e^x \sin x \quad dx\right] \tag{46}$$

substitution 1: x wird zu v, v' ist 1; $e^x \sin x$ wird zu u', $u = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)$.

Aufteilung: $\int e^x \cos x \quad dx$ wird zu I, $\int e^x \sin x \quad dx$ wird zu II.

Wir berechnen I:

$$\int e^x \cos x \quad dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \quad dx \tag{47}$$
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \quad dx \tag{48}$$
$$= \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C \tag{49}$$

Substitution 2: Hier wurde e^x zu u', u bleibt e^x[8]. Außerdem wird $\cos x$ v und v' somit $-\sin x$.

Substitution 3: Wieder ist e^x unser u' und bleibt für u gleich. $\sin x$ wird v, v' ist $\cos x$.

Wir berechnen II:

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \quad dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \quad dx && (50)\\
&= -e^x \cos x + e^s inx - \int e^x \sin x \quad dx && (51)\\
&= -\frac{1}{2} e^x (\cos x - \sin x) + C && (52)
\end{aligned}$$

Weiter im Context.

$$\begin{aligned}
\int xe^x \sin x \quad dx &= -\frac{1}{2} e^x (\cos x - \sin x)x + \frac{1}{4} e^x (\cos x + \sin x) + \frac{1}{4} e^x (\cos x - \sin x) + C && (53)\\
&= -\frac{1}{2} e^x (x\cos x - x\sin x) + \frac{1}{4} e^x (\cos x + \sin x + \cos x - \sin x) + C && (54)\\
&= -\frac{1}{2} e^x (x\cos x - x\sin x) + \frac{1}{4} e^x (2\cos x) + C && (55)\\
&= \frac{1}{2} e^x (x\sin x - x\cos x + \cos x) + C \qquad C \in \mathbb{R} && (56)
\end{aligned}$$

1.28 Riemann Integral

Beschreiben Sie die Partiellen Integration und Substitutionsregel des Riemannintegrals

Auf Grenzänderung achten!

Geben Sie 4 Eigenschaften des Riemannintegrals an![9]

[8] somit hätten wir auch schon ein optimales Testbeispiel: Differenzieren Sie e^x!
[9] [Kaiser], II(115), Mitschrift 16. Dezember 2003

2 Lineare Algebra

2.1 Rang einer $n \times n$ Matrix

Wie ist der Rang einer $n \times n$ Matrix definiert?[10]

Der Rang einer $n \times n$ Matrix ist ein anderer Ausdruck für „Anzahl der unabhängigen Zeilenvektoren". Das wiederum entspricht einerseits der „Anzahl der unabhängigen Spaltenvektoren" und andererseits der Anzahl der Elemente der Hauptdiagonale einer Matrix, wenn diese in Halbdiagonalform angeschrieben wird.

2.2 Direkte Summe

Wie ist die direkte Summe von Vektorräumen definiert? Hinweis: Der Durchschnitt ist irgendwie leer...[11]

2.3 Unabhängigkeit via Matrizzen

2.4 Begriff Vektorraum $m \times n$ Matrizzen

Zeigen Sie auch die Operationen für dargestellte Abbildung

2.5 Zusammenhang Summe und direkte Summe

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Summe und direkter Summe?

3 Was nicht kommt

3.1 Beweise

Es kommen zwar keine Beweise, dafür vollständige Induktion.

[10] [Kaiser], I(93)
[11] [Kaiser], I(77)

3.2 Interpolationsverfahren

regular falsi, Newton, Fixpunkt

4 Was erst im März kommt

4.1 Lineares Gleichungssystem

Ausrechnen (GAUSS Eliminationsverfahren)

4.2 Determinante berechnen

Wieder GAUSS Eliminationsverfahren.

Literatur

[Kaiser] Kaiser. *Begleitmaterial zur Vorlesung „Mathematik 1 für Informatiker".* WS 2003/04.

[Duden] Schneid (Bearbeiter), Engesser (Herausgeber). *Duden Rechnen und Mathematik: Das Lexikon für Schule und Praxis.* Mayers Lexikonverlag, Mannheim, 1994.

[RG] Razmik Galustian. *Analysis, Lineare Algebra, Algebra für Informatik. Prof. Kaiser. Ausgearbeitete Prüfungsbeispiele.* Aktionsgemeinschaft, Wien, 1995.

[Analysis 1] Neuzert, Eschmann, Blickensdörfer-Ehlers, Schelkes. *Analysis 1: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für Studienanfänger, 3. Auflage.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.